können die an reinen n-Ge-Einkristallen bei Temperaturen des flüssigen Wasserstoffs gemessenen Effekte [6] nicht erklärt werden. Ob die Einbeziehung der Störstellenstreuung diese Diskrepanz zu beseitigen vermag, wie es in entsprechender in der konventionellen Theorie bei höheren Temperaturen der Fall ist [2, 6], muß einer genauen Untersuchung vorbehalten bleiben. Für die Deutung der beobachteten Oszillationen in der Feldstärkeabhängigkeit von $\Delta\varrho/\varrho_0$ gibt es jedoch bis jetzt keine Anhaltspunkte. In nichtentarteten Halbleitern kann es einen HAAS-VAN-ALPHEN-Effekt im Sinne der Metalltheorie nicht geben. Nach STEELE [16] (Theory of Numbers) setzt sich die integrale Eigenwertdichte von „freien" Elektronen bei Berücksichtigung der Bahnquantisierung aus einem in H monotonen und einem in H oszillatorischen Anteil zusammen. Der δ-Charakter in der Ableitung der FERMIschen Verteilungsfunktion erhält diese Oszillationen auch bei der Integration über das gesamte Eigenwertspektrum. Bei der entsprechenden Integration über die Ableitung der BOLTZMANNschen Verteilungsfunktion werden die Oszillationen „ausgeglättet", so daß die Konzentration der Elektronen im L-Band eine *monoton* abnehmende Funktion der magnetischen Feldstärke ist [17].

Für die stete Förderung dieser Arbeit und für wertvolle Diskussionen danke ich Herrn Prof. KRAUTZ und Herrn Dr. SCHULTZ. Herrn Prof. KOHLER bin ich für die Anregung und für einige Diskussionen zu dieser Untersuchung sehr dankbar.

[16] M. C. STEELE, Phys. Rev. **88**, 451 [1952].

[17] S. auch A. N. WILSON, The Theory of Metals, Cambridge 1953, S. 164 ff.

Erweiterung der Theorie magnetohydrodynamischer Wellen und Anwendung auf inhomogene Schichten

Von EGON RICHTER

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. **11 a**, 901—912 [1956]; eingegangen am 15. August 1956)

Im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen über magnetohydrodynamische Wellen werden die MAXWELLschen Gleichungen in ihrer strengen Form mit den hydrodynamischen Gleichungen gekoppelt. Die als gyroelektrisches Medium betrachtete Flüssigkeit wird reibungsfrei, unmagnetisierbar und im Ruhesystem elektrisch neutral angenommen, wobei die Materialkonstanten sowie das äußere Magnetfeld ortsabhängig sein können. Nach üblicher Linearisierung lassen sich für Wellenausbreitung längs des äußeren Magnetfeldes die Querwellen gesondert behandeln, die sowohl die elektromagnetischen als auch die ALFVÉNschen Wellen als Grenzfälle enthalten. Das Reflexions- und Durchlaßvermögen einer inhomogenen Schicht wird berechnet und für homogene Medien der Energiesatz abgeleitet.

Im Jahre 1942 zeigte ALFVÉN [1], daß sich Störungen in einer leitenden Flüssigkeit, die von einem äußeren Magnetfeld durchsetzt wird, in bestimmter Weise fortpflanzen und daß insbesondere sinusförmige Störungen Wellen erzeugen, die als magnetohydrodynamische Wellen bezeichnet werden. Infolge gewisser Voraussetzungen ergeben sich bei ALFVÉN allerdings spezielle magnetohydrodynamische Wellen, die nach ihrem Entdecker ALFVÉNsche Wellen genannt werden. Für die Ableitung dieser ALFVÉNschen Wellen ist wesentlich, daß der Verschiebungsstrom vernachlässigt, die Leitfähigkeit unendlich gesetzt und die Flüssigkeit als inkompressibel betrachtet wird. Die von ALFVÉN begonnenen Untersuchungen über das Verhalten dieser Wellen wurden vom Standpunkt der Kontinuumstheorie aus von FERRARO [2] und ROBERTS [3] fortgeführt. In diesen Arbeiten wird das Reflexions- und Brechungsgesetz ALFVÉNscher Wellen für eine Unstetigkeitsfläche der Massendichte abgeleitet und das Reflexionsvermögen bei senkrechtem Einfall angegeben. Naturgemäß gehen in diese Ableitungen die Grenzbedingungen wesentlich ein, die in der Magnetohydrodynamik offenbar auch die Teilchenbewegung mit berücksich-

[1] H. ALFVÉN, Ark. Mat. Astr. Fys. B **29**, No. 2 [1942]. Cosmical Electrodynamics, Clarendon Press, Oxford 1950.

[2] V. C. A. FERRARO, Astrophys. J. **119**, 393 [1954].

[3] P. H. ROBERTS, Astrophys. J. **121**, 720 [1955].

tigen müssen. Gerade die Annahme über die Grenzbedingungen sind in den genannten Arbeiten nicht genügend begründet. Außerdem ist die Voraussetzung einer Unstetigkeitsfläche der Massendichte astrophysikalischen Problemen — auf die die Magnetohydrodynamik vornehmlich angewandt wird — sicher nicht angepaßt.

Die vorliegende Arbeit zeigt zunächst, daß bei Beschränkung auf Wellenausbreitung längs des äußeren Magnetfeldes ein allgemeinerer Wellentyp abgeleitet werden kann, der die elektromagnetischen und ALFVÉNschen Wellen als Grenzfälle enthält. Der Zusammenhang dieser Wellen, der hier aus der Kontinuumstheorie folgt, wurde bisher nur auf Grund sehr unterschiedlicher Dispersionsformeln festgestellt (z. B. ASTRÖM [4]; SCHLÜTER [5]). Anschließend wird die abgeleitete eindimensionale Wellengleichung auch für spezielle Ortsabhängigkeiten der Materialkonstanten durch Anwendung eines von EPSTEIN [6] angegebenen Verfahrens gelöst.

A. Die Grundgleichungen

Als Maßsystem wird im Anschluß an die bisherigen Abhandlungen über magnetohydrodynamische Wellen das GAUSSsche System verwendet. Das Zusammenwirken von elektromagnetischen und hydrodynamischen Vorgängen in der Magnetohydrodynamik bedingt die Verwendung der gekoppelten MAXWELLschen und — im allgemeinsten Fall — NAVIER-STOKESschen Gleichungen. Die Aufstellung der von ALFVÉN und den folgenden Autoren verwendeten Grundgleichungen erfolgt unter der Voraussetzung, daß der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden kann. Im Hinblick auf den allgemeineren Wellentyp, der hier behandelt werden soll, ist diese Vernachlässigung nicht mehr gestattet. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die Ortsabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten eine zusätzliche Kraftwirkung auf die Materie ergibt, die in die hydrodynamische Grundgleichung eingehen muß. Um die dadurch bedingte Abweichung von den ALFVÉNschen Grundgleichungen in richtiger Weise zu erfassen, werden die benötigten Grundgleichungen auf deduktivem Wege abgeleitet.

Das durch die Bewegung von Materie in einem äußeren Magnetfeld entstehende elektromagnetische Feld ist bekanntlich nicht nur für große Geschwindigkeiten vom Standpunkt des Beobachters abhängig. Die im Körpersystem definierten Materialgleichungen sind nach den Formeln der speziellen Relativitätstheorie auch für den Fall $v^2/c^2 = \beta^2 \ll 1$ auf das Laborsystem umzuschreiben. Diese Umschreibung ist im vorliegenden Fall notwendig, da die hydrodynamische Gleichung auf das Laborsystem bezogen ist. Die Formeln der Relativitätstheorie liefern zugleich den Ausdruck für die Kraft, die vom Laborsystem aus gesehen auf die bewegte Materie ausgeübt wird. Obwohl die Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie exakt nur für unbeschleunigte Systeme gelten, lassen sie sich in gleicher Näherung wie bei der Behandlung der Unipolarinduktion auf den vorliegenden Fall anwenden. Die Materialgleichungen sind für das Körpersystem durch

$$\mathfrak{D}^0 = (\varepsilon)\,\mathfrak{E}^0; \quad \mathfrak{B}^0 = \mu\,\mathfrak{H}^0; \quad \mathfrak{j}^0 = (\sigma)\,\mathfrak{E}^0 \tag{1}$$

gegeben. Hierin bedeuten

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & -i\,\varepsilon' \\ 0 & i\,\varepsilon' & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei die Größen ε_1, ε_2, ε', σ_1 und σ_2 reell sind. Das Auftreten der ε- und σ-Tensoren wird durch die vom äußeren Magnetfeld hervorgerufene Anisotropie bedingt. Der ε-Tensor erhielt gleich die für gyroelektrische Medien gültige Form, wobei das äußere Magnetfeld in der x-Richtung liegen soll. Wegen der durch das äußere Magnetfeld gegebenen Rotationssymmetrie fallen die Achsen von (ε) und (σ) zusammen.

Für $\beta^2 \ll 1$ ergibt die spezielle Relativitätstheorie die Transformationsformeln

$$\mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{B}], \qquad \mathfrak{D}^0 = \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}], \tag{3}$$

$$\mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{j}^0 = \mathfrak{j} - \mathfrak{v}\,\varrho_e, \qquad \varrho_e{}^0 = \varrho_e - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}, \mathfrak{j}), \tag{5}$$

wobei ϱ_e die Raumladungsdichte bedeutet und vorausgesetzt wurde, daß die elektrischen Felder nur durch Unipolareffekte hervorgerufen werden, so daß *

$$|\mathfrak{B}| \gg \frac{1}{c}|\mathfrak{v}|\,|\mathfrak{E}|; \quad |\mathfrak{H}| \gg \frac{1}{c}|\mathfrak{v}|\,|\mathfrak{D}| \tag{6}$$

[4] E. ASTRÖM, Ark. Fys. **2**, 443 [1950].
[5] A. SCHLÜTER, Ann. Phys., Lpz. **10**, 418 [1952].
[6] P. S. EPSTEIN, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash. **16**, 627 [1930].

* Im folgenden wird unter dem Betrag eines Vektors stets $|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^*}$ verstanden.

gilt. Im folgenden soll nur unmagnetisierbare und im Ruhesystem elektrisch neutrale Materie betrachtet werden, d. h.

$$\mu = 1 \quad \text{und} \quad \varrho_e{}^0 = 0\,. \tag{7}$$

Nach Gl. (5) ist dann wegen $\beta^2 \ll 1$ auch

$$\mathfrak{j}^0 = \mathfrak{j}\,. \tag{8}$$

Für die Kraftdichte, die vom elektromagnetischen Feld auf Materie ausgeübt wird, liefert die Relativitätstheorie – wobei hier im Anschluß an v. LAUE [7] der MINKOWSKIsche Ausdruck des Energie-Impuls-Tensors* Verwendung findet – unter Ausnutzung von Gl. (6):

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{j}, \mathfrak{B}] + \frac{1}{8\,\pi}\,\{&\mathfrak{D}\,\operatorname{div}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\,\operatorname{div}\mathfrak{D}\\ &+ \operatorname{rot}[\mathfrak{E}, \mathfrak{D}] - [\mathfrak{E}, \operatorname{rot}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{D}, \operatorname{rot}\mathfrak{E}]\}\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Nimmt man noch an, daß die betrachtete Flüssigkeit als reibungsfrei angesehen werden kann, so ergeben sich folgende Grundgleichungen für das Laborsystem

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\,\pi}{c}\,\mathfrak{j} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{11}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0\,, \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\,\pi\,\varrho_e = \frac{4\,\pi}{c^2}\,(\mathfrak{v}, \mathfrak{j}) \tag{13}$$

mit den Materialgleichungen, die nach Gl. (1) infolge der Gln. (3), (4), (7), (8) lauten

$$\mathfrak{D} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] = (\varepsilon)\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{B}]\right\}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}\,, \tag{15}$$

$$\mathfrak{j} = (\sigma)\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{B}]\right\} \tag{16}$$

und schließlich

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{1}{\varrho}\,(\mathfrak{K} - \operatorname{grad} p) + \mathfrak{g}\,, \tag{17}$$

wobei (ε) und (σ) durch Gl. (2) sowie $\mathfrak{K}$ durch Gl. (9) festgelegt sind. Außer der elektromagnetischen Kraft wurde in der hydrodynamischen Gleichung noch eine Schwerkraft berücksichtigt.

[7] M. v. LAUE, Die Relativitätstheorie, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 5. Auflage 1952; 1. Band.

Die zur Aufstellung dieser Grundgleichungen gemachten Voraussetzungen sind:

reibungsfreie, unmagnetisierbare Flüssigkeit, die im Ruhesystem elektrisch neutral ist.

Zur Lösung des angegebenen Gleichungssystems wird außerdem noch die Kontinuitätsgleichung

$$\partial \varrho / \partial t + \operatorname{div}(\varrho \cdot \mathfrak{v}) = 0$$

und eine Gleichung benötigt, die einen Zusammenhang zwischen der Massendichte ϱ und dem Druck p liefert.

B. Ableitung der Wellengleichung

Entsprechend der Aufgabe der Magnetohydrodynamik – den Einfluß eines äußeren Magnetfeldes auf eine leitende Flüssigkeit zu untersuchen – läßt sich das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ aus einem äußeren statischen Feld $\mathfrak{H}_0$ und dem durch den Induktionsvorgang hervorgerufenen Feld $\mathfrak{h}$ zusammensetzen, so daß

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{H}_0(\mathfrak{r}) + \mathfrak{h}(\mathfrak{r}, t), \tag{18}$$

ist, wobei in dem Gebiet, das die betrachtete Flüssigkeit ausfüllt,

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\mathfrak{H}_0 = 0 \tag{19}$$

sein muß. Da elektrostatische Felder ausgeschlossen werden, so bezeichnet $\mathfrak{E}$ das mit $\mathfrak{h}$ gekoppelte elektrische Feld. Im Gegensatz zu $\mathfrak{H}_0$ werden $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{v}$ erst durch eine Störung hervorgerufen. Für die Komponenten von $\mathfrak{H}$ wird angesetzt

$$\mathfrak{H}_0(\mathfrak{r}) = \{H_0\,;\, h_{0y}\,;\, h_{0z}\}\,;\quad \mathfrak{h}(\mathfrak{r}, t) = \{h_x\,;\, h_y\,;\, h_z\}\,.$$

Statt Gl. (18) läßt sich dann auch schreiben

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0{}' + \mathfrak{h}'\,,$$

wobei nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_0{}'(\mathfrak{r}) &= \{H_0\,;\, 0\,;\, 0\}\,;\\ \mathfrak{h}'(\mathfrak{r}, t) &= \{h_x\,;\, h_{0y} + h_y\,;\, h_{0z} + h_z\}\end{aligned} \tag{20}$$

sein soll. Mit der Voraussetzung

$$|\,\mathfrak{H}_0{}'\,| \gg |\,\mathfrak{h}'\,| \tag{21}$$

kann die Richtung von $\mathfrak{H}_0{}'$ als Hauptrichtung des äußeren Magnetfeldes bezeichnet werden, die nach Gl. (20) die x-Richtung ist. Dies steht im Einklang mit dem in Gl. (2) angesetzten ε- und σ-Tensor. Damit diese Tensoren die x-Achse als Hauptachse bei-

* Die Theorie magnetohydrodynamischer Wellen bei Verwendung des Energie-Impuls-Tensors von ABRAHAM erscheint in Kürze.

behalten, wird angenommen, daß die Komponenten h_{0y} und h_{0z} des äußeren Feldes genügend klein sind. Die Berücksichtigung dieser Komponenten ist nur zur Erfüllung von Gl. (19) nötig. Für den Fall, daß $\mathfrak{H}_0$ konstant ist, können h_{0y} und h_{0z} ohnehin zu Null gemacht werden.

Ferner wird vorausgesetzt, daß gilt:

$$|(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}| \ll |\partial\mathfrak{v}/\partial t|. \tag{22}$$

In der vorliegenden Arbeit sollen nunmehr nur Ausbreitungsvorgänge mit einer Fortpflanzungsrichtung parallel zur Hauptrichtung des äußeren Magnetfeldes betrachtet werden, d. h. es gilt im folgenden stets

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}(x,t)\,;\quad \mathfrak{h}=\mathfrak{h}(x,t)\,;\quad \mathfrak{D}=\mathfrak{D}(x,t)\,;\quad \mathfrak{v}=\mathfrak{v}(x,t). \tag{23}$$

Weiterhin wird immer angenommen, daß die Ortsabhängigkeit der Materialkonstanten und der Größe $\mathfrak{H}_0'$ allein durch eine Abhängigkeit von x gegeben ist, also

$$\varepsilon=\varepsilon(x)\,;\quad \sigma=\sigma(x)\,;\quad H_0=H_0(x)\,.$$

Mit diesen Annahmen geht Gl. (22) über in

$$\left|v_x\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x}\right| \ll \left|\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}\right|,$$

und der Ansatz

$$v_l=v_{l0}\,e^{i\,\omega(t\pm x/V_l)}$$

[$l=x,y,z$; V_l reell] liefert daraus die Bedingung

$$|v_{x0}| \ll V_l\,.$$

Es zeigt sich, daß die Linearisierungsbedingung stets nur die Größe der Amplitude von v in der Fortpflanzungsrichtung durch die Größe der Phasengeschwindigkeit einschränkt.

Mit den Annahmen Gln. (18), (19) folgt durch rot-Bildung von Gl. (11) und Ausnutzung von Gln. (10), (16)

$$\Delta\mathfrak{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{E} =\frac{4\pi(\sigma)}{c^2}\left(\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{v},\mathfrak{H}_0']\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{D}}{\partial t^2}, \tag{24}$$

wobei zugleich Gl. (21) verwendet wurde. Die Annahme Gl. (23) ergibt hieraus für die y- und z-Komponente unter Berücksichtigung des σ-Tensors

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=-\frac{c}{H_0}\frac{\partial E_y}{\partial t}-\frac{c}{4\pi\sigma_2 H_0}\left(\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\right), \tag{25}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{c}{H_0}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\frac{c}{4\pi\sigma_2 H_0}\left(\frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\right). \tag{26}$$

Die x-Komponenten von Gl. (24) liefert lediglich die nach der Zeit abgeleitete x-Komponente von Gl. (10), so daß diese gleich in der ursprünglichen Form

$$\frac{\partial D_x}{\partial t}+4\pi j_x=0 \tag{27}$$

verwendet werden kann. Außerdem ergeben die Gln. (11), (12), (13) direkt

$$\frac{\partial h_x}{\partial t}=0;\qquad \frac{\partial h_y}{\partial t}=c\frac{\partial E_z}{\partial x};\qquad \frac{\partial h_z}{\partial t}=-c\frac{\partial E_y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x}=0;\qquad \frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{4\pi}{c^2}(\mathfrak{v},\mathfrak{j})\,. \tag{28}$$

Wegen der Annahme Gl. (23) wird aus Gl. (9)

$$K_x=\frac{1}{c}[\mathfrak{j},\mathfrak{H}]_x+\frac{1}{8\pi}\left\{D_x\frac{\partial E_x}{\partial x}-E_x\frac{\partial D_x}{\partial x}+D_y\frac{\partial E_y}{\partial x}-E_y\frac{\partial D_y}{\partial x}+D_z\frac{\partial E_z}{\partial x}-E_z\frac{\partial D_z}{\partial x}\right\},$$

$$K_y=\frac{1}{c}[\mathfrak{j},\mathfrak{H}]_y\,;\qquad K_z=\frac{1}{c}[\mathfrak{j},\mathfrak{H}]_z\,, \tag{29}$$

und für die y- und z-Komponente ergibt sich nach Gln. (10), (21), (23)

$$K_y=\frac{H_0}{4\pi}\left(\frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}\right),$$

$$K_z=\frac{H_0}{4\pi}\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}\right). \tag{30}$$

Weiterhin wird angenommen, daß die Störung ebenfalls die Dichte und den Druck beeinflußt und zwar entsprechend

$$\varrho=\varrho_0(x)+\delta\varrho(x,t)\,;\quad p=p_0(x)+\delta p(x,t), \tag{31}$$

wobei $$|\delta\varrho| \ll \varrho_0\,;\quad |\delta p| \ll p_0\,. \tag{32}$$

Setzt man Gl. (31) in Gl. (17) ein, so folgt für den ungestörten Zustand $\varrho_0\,\mathfrak{g}=\operatorname{grad}p_0$, was wegen der reinen x-Abhängigkeit der auftretenden Größen in $\varrho_0\,g_x=\partial p_0/\partial x$ übergeht. Daraus folgt, daß $\mathfrak{g}$ nur eine x-Komponente besitzen darf. Durch Verwendung der Gln. (22), (31), (32) und (30) ergibt sich aus Gl. (17)

$$\varrho_0\frac{\partial v_x}{\partial t}=K_x-\frac{\partial p}{\partial x}+g_x,$$

$$\varrho_0\frac{\partial v_y}{\partial t}=K_y=\frac{H_0}{4\pi}\left(\frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}\right), \tag{33}$$

$$\varrho_0\frac{\partial v_z}{\partial t}=K_z=\frac{H_0}{4\pi}\left(\frac{\partial hz}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}\right),$$

wobei K_x aus Gl. (29) zu entnehmen ist.

Die Gln. (25), (26), (28) und (33) zeigen, daß die y- und z-Komponenten von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{v}$ untereinander so gekoppelt sind, als ob die x-Komponenten gar nicht vorhanden wären. Dies ermöglicht die Aufstellung einer Wellengleichung allein für die y- und z-Komponenten. Allerdings gehen in die x-Komponenten die y- und z-Komponenten noch ein.

Aus Gl. (28) folgt für die x-Komponente von $\mathfrak{h}$ sofort

$$h_x = 0 . \tag{34}$$

Die Gl. (27) liefert unter der Voraussetzung, daß es sich um zeitlich periodische Vorgänge handelt, den Ausdruck

$$i\,\omega\,D_x + 4\,\pi\,j_x = 0 .$$

Mit Hilfe der Gln. (14) und (16) folgt daraus wegen des Tensors Gl. (2)

$$E_x = \frac{(1-\varepsilon_1)\,i\,\omega - 4\,\pi\,\sigma_1}{c(i\,\omega\,\varepsilon_1 + 4\,\pi\,\sigma_1)}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{h}']_x \tag{35}$$

und

$$D_x = -\frac{4\,\pi\,\sigma_1}{c(i\,\omega\,\varepsilon_1 + 4\,\pi\,\sigma_1)}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{h}']_x , \tag{36}$$

$$j_x = \frac{i\,\omega\,\sigma_1}{c(i\,\omega\,\varepsilon_1 + 4\,\pi\,\sigma_1)}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{h}']_x . \tag{37}$$

Die x-Komponente der Gl. (33) wird nicht behandelt, da sich später zeigt, daß in der hier verwendeten Näherung diese Komponente unberücksichtigt bleiben kann.

Führt man die übliche Zusammenfassung der y- und z-Komponenten in zwei zirkular polarisierte Wellen ein, so läßt sich die y- und z-Komponente der Gl. (14) schreiben als

$$D_\pm = (\varepsilon_2 \mp \varepsilon')\,E_\pm \mp i(\varepsilon_2 \mp \varepsilon' - 1)\,\frac{H_0}{c}\,v_\pm , \tag{38}$$

wobei

$$E_\pm = E_y \pm i\,E_z ; \quad D_\pm = D_y \pm i\,D_z ; \quad v_\pm = v_y \pm i\,v_z \tag{39}$$

ist. Zur Aufstellung der Wellengleichung wird nunmehr die y- und z-Komponente der Gl. (33) nach der Zeit abgeleitet und die Gl. (28) ausgenutzt, so daß sich in der Schreibweise der Gl. (39)

$$\mp i\,\varrho_0\,\frac{\partial^2 v_\pm}{\partial t^2} = \frac{H_0}{4\,\pi}\left(\frac{1}{c}\,\frac{\partial^2 D_\pm}{\partial t^2} - c\,\frac{\partial^2 E_\pm}{\partial x^2}\right) \tag{40}$$

ergibt. Schließlich folgt aus Gln. (25), (26) analog

$$\mp i\,\frac{\partial v_\pm}{\partial t} = \frac{c}{H_0}\left(\frac{c^2}{4\,\pi\,\sigma_2}\,\frac{\partial^2 E_\pm}{\partial x^2} - \frac{1}{4\,\pi\,\sigma_2}\,\frac{\partial^2 D_\pm}{\partial t^2} - \frac{\partial E_\pm}{\partial t}\right) . \tag{41}$$

Die Gln. (40), (41) liefern wegen Gl. (38) mit dem Ansatz

$$E_\pm = e^{i\,\omega\,t} \cdot Y_\pm(x) , \tag{42}$$

d. h. Fortpflanzungsrichtung parallel zur x-Achse, endlich

$$\frac{\partial^2 Y_\pm(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{a_\pm - i\,b_\pm}{g}\,Y_\pm(x) = 0 , \tag{43}$$

wobei

$$\begin{aligned} a_\pm &= 4\,\pi\,H_0^2\,\sigma_2^2\,\varrho_0\,c^2 + H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4(\varepsilon_2 \mp \varepsilon') , \\ b_\pm &= \omega\,\varrho_0\,\sigma_2\,c^2\,\{4\,\pi\,\varrho_0\,c^2 - (\varepsilon_2 \mp \varepsilon' - 1)\,H_0^2\} , \qquad (44) \\ g &= H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4 \end{aligned}$$

bedeuten *.

Gl. (43) ist die gesuchte Wellengleichung für die E_+- und E_--Komponente der elektrischen Feldstärke. Aus Gl. (43) lassen sich durch verschiedene Festsetzungen der Materialkonstanten spezielle Schwingungsgleichungen ableiten. Offenbar ist dafür nur das Quadrat des komplexen magnetohydrodynamischen Brechungsindex $\mathfrak{N}^2 = (a - i\,b)/g$ maßgebend, das deshalb im folgenden allein betrachtet werden soll.

a) $H_0 \rightarrow 0$. Wenn kein äußeres Magnetfeld mehr besteht, so wird

$$\mathfrak{N}^2 = \varepsilon_2 - i\,\frac{4\,\pi\,\sigma_2}{\omega} ,$$

d. h. die Kopplung zwischen Flüssigkeitsbewegung und elektromagnetischem Feld wird aufgehoben, es verbleibt die bekannte elektromagnetische Schwingungsgleichung. Bemerkenswert ist, daß $H_0 \rightarrow 0$ der Annahme Gl. (21) widerspricht, aber trotzdem Gl. (43) in die richtige Schwingungsgleichung übergeht. Der Grund dafür ist, daß in diesem Fall in den Ausgangsgleichungen (14) und (16) die Linearisierung, die sich sonst nach Anwendung von Gl. (21) ergibt, durch die Forderung

$$\left|\frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{h}']\right| \ll |\mathfrak{E}| ; \qquad \left|\frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{h}']\right| \ll |\mathfrak{D}|$$

erfüllt wird. Die hierin auftretende Größe $\mathfrak{v}$ wird für $H_0 \rightarrow 0$ später berechnet.

b) $\sigma_2 \rightarrow 0$. Im Isolator wird $b = 0$, also

$$\mathfrak{N}^2 = \varepsilon_2 \mp \varepsilon' ,$$

d. h., hier wird ebenfalls die Kopplung zwischen Flüssigkeitsbewegung und elektromagnetischem Feld aufgehoben.

* Der hier angegebene Koeffizient der Wellengleichung stimmt mit dem in der Notiz (Z. Naturforschg. **11 a**, 251 [1956]) mitgeteilten Koeffizienten nicht vollständig überein, da an Stelle der hier verwendeten Gl. (14) dort $\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}$ benutzt wurde.

c) $\sigma_2 \to \infty$. Im idealen Leiter wird $b/g = 0$, also

$$\mathfrak{N}^2 = \frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2} + 1\,.$$

Die Gl. (43) geht in diesem Fall in die von ALFVÉN [1] angegebene Schwingungsgleichung über, wobei allerdings an Stelle der magnetischen Feldstärke hier die elektrische verwendet wird. Mit der Annahme

$$\frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2} \gg 1$$

erhält man unter der Voraussetzung konstanter Größen ϱ_0 und H_0 die ALFVÉNschen Wellen, deren Phasengeschwindigkeit $V = H_0 (4\pi\varrho_0)^{-1/2}$ ist.

d) $\varrho_0 \to 0$. Im Vakuum wird $\mathfrak{N}^2 = 1$, so daß Gl. (43) in die elektromagnetische Amplitudengleichung für das Vakuum übergeht.

e) Ungedämpfte Wellen. Aus einer Wellengleichung ergeben sich immer dann ungedämpfte Wellen, wenn der imaginäre Anteil des Koeffizienten der Gl. (43) verschwindet. Wie man aus den Fällen b), c), d) ersieht, ist dies zunächst der Fall für

$$\sigma_2 \to 0; \quad \sigma_2 \to \infty; \quad \varrho_0 \to 0\,. \tag{45}$$

Aus Gl. (44) entnimmt man aber, daß es noch eine weitere Möglichkeit gibt, nämlich

$$c^2\, 4\pi\varrho_0 = (\varepsilon_2 \mp \varepsilon' - 1)\, H_0^2$$

oder

$$\varepsilon_2 \mp \varepsilon' = \frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2} + 1\,. \tag{46}$$

Wenn diese Beziehung für eine der beiden zirkularen Wellen erfüllt ist, so wird

$$\mathfrak{N}^2 = \frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2} + 1$$

wie im Fall c). Die Gln. (45), (46) zeigen, daß in 4 verschiedenen Fällen eine ungedämpfte Welle möglich ist. Während aber die in Gl. (45) genannten Bedingungen keinen Einfluß auf andere Materialkonstanten haben, fordert Gl. (46) einen ganz bestimmten Zusammenhang zwischen den Materialkonstanten ε_2, ε', ϱ_0 und dem äußeren Magnetfeld H_0, der nur für sehr spezielle Verhältnisse erfüllt sein wird. Deshalb beschränken sich alle im folgenden für ungedämpfte Wellen durchgeführten Betrachtungen auf die durch Gl. (45) angegebenen Fälle. Die der vierten Möglichkeit entsprechenden Formeln erhält man sofort durch Ausnutzung von Gl. (46).

C. Lösung der Schwingungsgleichung

Für *ortsunabhängiges* ε, σ, ϱ_0 und H_0 ist $\mathfrak{N}$ ebenfalls ortsunabhängig. Dann läßt sich die Lösung von Gl. (43) sofort angeben und die Variablen $h_\pm$, $v_\pm$, $D_\pm$ und $j_\pm$ können aus den Gln. (28), (40), (38) und (16) berechnet werden.

Macht man die positive x-Richtung zur Fortpflanzungsrichtung und setzt

$$\mathfrak{N} = \vartheta - i\varphi\,,$$

so folgt mit Rücksicht auf Gl. (42) aus Gl. (43)

$$E_\pm = E_{\pm 0}\, e^{i\omega(t - [\vartheta - i\varphi]/c \cdot x)}\,. \tag{47}$$

Entsprechend Gl. (39) läßt sich auch die y- und z-Komponente von $\mathfrak{h}$ zusammenfassen und der Ansatz Gl. (47) liefert

$$h_\pm = \pm\, i(\vartheta - i\varphi)\, E_\pm\,. \tag{48}$$

Aus Gln. (40), (41) folgt mit Gl. (44)

$$v_\pm = \mp \frac{H_0 \sigma_2 c(\omega\varrho_0 c^2 + i H_0^2 \sigma_2)}{H_0^4 \sigma_2^2 + \omega^2 \varrho_0^2 c^4} E_\pm\,, \tag{49}$$

und aus Gl. (38) ergibt sich mit Gl (49)

$$D_\pm = \frac{H_0^4 \sigma_2^2 + \omega^2 \varrho_0^2 c^4 (\varepsilon_2 \mp \varepsilon') + i\,\omega\varrho_0 c^2 H_0^2 \sigma_2 (\varepsilon_2 \mp \varepsilon' - 1)}{H_0^4 \sigma_2^2 + \omega^2 \varrho_0^2 c^4} E_\pm\,. \tag{50}$$

Wegen Gl. (21) liefert Gl. (16) ebenfalls mit Gl. (49)

$$j_\pm = \frac{\omega\varrho_0 \sigma_2 c^2 (\omega\varrho_0 c^2 + i H_0^2 \sigma_2)}{H_0^4 \sigma_2^2 + \omega^2 \varrho_0^2 c^4} E_\pm\,. \tag{51}$$

Für die im Abschnitt B unter e) betrachteten Fälle ungedämpfter Wellen ergeben sich die Größen $v_\pm$, $h_\pm$, $D_\pm$ und $j_\pm$ aus Gln. (48), (49), (50) und (51). Danach ist

für $\sigma_2 \to 0$: $\quad h_\pm = \pm i(\varepsilon_2 \mp \varepsilon')^{1/2} E_\pm$, $\quad v_\pm = 0$,

$D_\pm = (\varepsilon_2 \mp \varepsilon')\, E_\pm$, $\quad j_\pm = 0$;

für $\sigma_2 \to \infty$: $\quad h_\pm = \pm\, i \left(\frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} E_\pm$,

$v_\pm = \mp i \frac{c}{H_0} E_\pm$, $\quad D_\pm = E_\pm$, $\quad j_\pm = i \frac{\omega\varrho_0 c^2}{H_0^2} E_\pm$;

für $\varrho_0 \to 0$: $\quad h_\pm = \pm i E_\pm$, $\quad v_\pm = \mp i \frac{c}{H_0} E_\pm$,

$D_\pm = E_\pm$, $\quad j_\pm = 0$.

Aus Gl. (49) folgt ferner, daß mit $H_0 \to 0$ auch $v_\pm \to 0$ ist, und man sieht, daß die für diesen Fall im Abschnitt B unter a) angegebenen Bedingungen, die Gl. (21) ersetzen müssen, immer erfüllt werden können.

Aus den Ergebnissen für $\sigma_2 \to \infty$ kann man entnehmen, daß die von ALFVÉN zur Ableitung der nach ihm benannten Wellen gemachten Annahme

$$|4\pi\mathfrak{j}| \gg \left|\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}\right|$$

gerade auf die Bedingung

$$\frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2} \gg 1$$

führt, die bereits im vorigen Abschnitt unter c) verwendet wurde, um die Phasengeschwindigkeit ALFVÉNscher Wellen zu erhalten.

Für *ortsabhängiges* ε, σ, ϱ_0 und H_0 wird $\mathfrak{N}$ auch ortsabhängig, und die Lösung der Schwingungsgleichung (43) ist im allgemeinen nicht mehr geschlossen möglich. Unter gewissen einschränkenden Bedingungen für den Koeffizienten lassen sich jedoch nach einem von EPSTEIN[6] angegebenen Verfahren auch dann noch über das Reflexions- und Durchlaßvermögen von Wellen, die der benutzten Wellengleichung gehorchen, Aussagen machen. Dieses Verfahren wurde von RAWER[8] auf die Wellengleichung elektromagnetischer Wellen im Hinblick auf die Ionosphäre angewandt. Um diese Methode für die Gl. (43) benutzen zu können, müssen verschiedene Aussagen in allgemeinerer Weise abgeleitet werden als dies für die Anwendung auf die Ionosphäre nötig ist. Da diese Verallgemeinerung in Anlehnung an die von RAWER wiedergegebene Darstellung der EPSTEINschen Methode leicht durchgeführt werden kann, sollen hier nach einer kurzen Beschreibung des Verfahrens sofort die Ergebnisse diskutiert und verwendet werden.

Die EPSTEINsche Lösungsmethode basiert auf der Möglichkeit, eine andere Differentialgleichung mit ortsabhängigen Koeffizienten, deren Lösungen bekannt sind, auf eine Differentialgleichung vom Schwingungsgleichungstyp zu transformieren. EPSTEIN wählt dazu eine möglichst allgemeine Differentialgleichung, nämlich die hypergeometrische, und unterwirft sie einer Transformation derart, daß sich eine Schwingungsgleichung ergibt. Da die Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung bekannt sind, so hat man vermittels der gleichen Transformation auch die Lösungen der Schwingungsgleichung. Allerdings schränkt dieses Verfahren die zunächst beliebige x-Abhängigkeit des Koeffizienten der Gl. (43) auf ganz bestimmte Abhängigkeiten ein. Die dann mit Hilfe der EPSTEINschen Methode gewonnenen Ausdrücke für den Reflexions- und Durchlaßkoeffizienten gelten auch für die in dieser Arbeit betrachteten Wellen. Durch Beschränkung auf ungedämpfte Wellen lassen sich diese Ausdrücke weitgehend vereinfachen, so daß im folgenden nur ungedämpfte Wellen diskutiert werden sollen.

Setzt man $a_l/g_l = \vartheta_l^2$; $l = \mathrm{I}, \mathrm{II}, 0$, so ist die spezielle, durch das verwendete Lösungsverfahren bedingte Ortsabhängigkeit des reellen Brechungsindex ϑ gegeben durch

$$\vartheta^2(x) = \vartheta_{\mathrm{I}}^2 + \{\vartheta_{\mathrm{II}}^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2\} \frac{e^{\varkappa x}}{1+e^{\varkappa x}} + \left\{ \vartheta_0^2 - \tfrac{1}{2}(\vartheta_{\mathrm{I}}^2 + \vartheta_{\mathrm{II}}^2) \right\} \frac{4\, e^{\varkappa x}}{(1+e^{\varkappa x})^2}, \quad (52)$$

worin $\varkappa$ reell und >0 ist. Hierin ist $\vartheta = \vartheta_{\mathrm{I}}$ für $x \to -\infty$; $\vartheta = \vartheta_{\mathrm{II}}$ für $x \to +\infty$; $\vartheta = \vartheta_0$ für $x = 0$. Während die Bedeutung von $\vartheta_{0,\,\mathrm{I},\,\mathrm{II}}$ als Brechungsindex für bestimmte x-Werte anschaulich klar ist, bedarf die in Gl. (52) auftretende Größe $\varkappa$, die durch die sogenannte EPSTEIN-Transformation eingeführt wurde, noch einer Deutung. Dazu wird Gl. (52) asymptotisch entwickelt. Dies liefert

für $e^{\varkappa x} \ll 1$, d. h. $x \to -\infty$

$$\vartheta^2_{x\to-\infty}(x) = \vartheta_{\mathrm{I}}^2 + (4\,\vartheta_0^2 - 3\,\vartheta_{\mathrm{I}}^2 - \vartheta_{\mathrm{II}}^2)\, e^{\varkappa x} \quad (53)$$

für $e^{\varkappa x} \gg 1$, d. h. $x \to +\infty$

$$\vartheta^2_{x\to+\infty}(x) = \vartheta_{\mathrm{II}}^2 + (4\,\vartheta_0^2 - 3\,\vartheta_{\mathrm{II}}^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2)\, e^{\varkappa x}. \quad (54)$$

Da sich $\vartheta^2(x)$ den Werten ϑ_{I}^2 bzw. $\vartheta_{\mathrm{II}}^2$ asymptotisch nähert, so wird bei numerischen Berechnungen für irgendwelche x-Werte, die durch $e^{\varkappa x_{\mathrm{K}}} \ll 1$ bzw. $e^{\varkappa x_{\mathrm{G}}} \gg 1$ gegeben sind, der Fall eintreten, daß sich ϑ_{I}^2 bzw. $\vartheta_{\mathrm{II}}^2$ an diesen Stellen von $\vartheta^2(x)$ praktisch nicht mehr unterscheidet. Was als praktisch ununterscheidbar angesehen werden soll, das ist natürlich eine Frage der Definition, die jeweils gesondert angegeben werden muß. Die Stellen, an denen auf Grund einer solchen Definition Ununterscheidbarkeit von ϑ^2 und ϑ_{I}^2 bzw. $\vartheta_{\mathrm{II}}^2$ vorliegt, sollen stets mit x_{K} bzw. x_{G} bezeichnet werden, ihr Abstand voneinander sei

$$x_{\mathrm{G}} - x_{\mathrm{K}} = d. \quad (55)$$

Dann ist d die Dicke der Schicht, innerhalb welcher sich der Übergang des $\vartheta^2(x)$ von ϑ_{I}^2 auf $\vartheta_{\mathrm{II}}^2$ vollzieht. Für diese Stellen gilt Gl. (53) bzw. (54), so daß sich nach Gl. (55)

$$d = \frac{1}{\varkappa} \ln \left\{ \frac{(4\,\vartheta_0^2 - 3\,\vartheta_{\mathrm{II}}^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2)(4\,\vartheta_0^2 - 3\,\vartheta_{\mathrm{I}}^2 - \vartheta_{\mathrm{II}}^2)}{(\vartheta_{\mathrm{G}}^2 - \vartheta_{\mathrm{II}}^2)(\vartheta_{\mathrm{K}}^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2)} \right\} \quad (56)$$

ergibt. Die oben erwähnte, noch benötigte Definition kann man z. B. folgendermaßen angeben:

$$\vartheta_{\mathrm{K}}^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2 = \frac{4\,\vartheta_0^2 - 3\,\vartheta_{\mathrm{I}}^2 - \vartheta_{\mathrm{II}}^2}{e^n}, \quad (57)$$

[8] K. RAWER, Ann. Phys., Lpz. **35**, 385 [1939].

wobei noch gefordert werden muß, daß $e^n \geqq e^{-\varkappa x_K} \gg 1$ ist (x_K negativ). Analog kann man für $\vartheta_G^2 - \vartheta_{II}^2$ verfahren, so daß Gl. (56) in $d = 2\,n/\varkappa$ mit $e^n \gg 1$ übergeht, wobei n den Grad der Annäherung angibt und noch frei wählbar ist. Wie man sieht, ist $\varkappa$ umgekehrt proportional zur Schichtdicke d.

Als Reflexions- und Durchlaßvermögen einer ungedämpften Welle, die im Gebiet $x \ll 0$ entsteht, liefert das EPSTEINsche Verfahren

$$RR^* = \frac{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} - \vartheta_I)\} + \cos^2 \pi\,\psi}{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} + \vartheta_I)\} + \cos^2 \pi\,\psi} \tag{58}$$

und

$$D\,D^* = \frac{\vartheta_I \cdot \mathfrak{Sin}(\pi\,S\,\vartheta_I) \cdot \mathfrak{Sin}(\pi\,S\,\vartheta_{II})}{\vartheta_{II}\,(\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} + \vartheta_I)\} + \cos^2 \pi\,\psi)}, \tag{59}$$

wobei

$$\psi^2 = \tfrac{1}{4} + S^2\{\vartheta_0^2 - \tfrac{1}{2}(\vartheta_I^2 + \vartheta_{II}^2)\} \tag{60}$$

mit $\psi^2 \gtreqless 0$ und $\quad S = \dfrac{2\,\omega}{\varkappa\,c} = \dfrac{\omega\,d}{n\,c}$ ist.

Aus Gl. (58) ergibt sich bei gegebenem ϑ_I, ϑ_{II} und S ein und derselbe Wert des Reflexionsvermögens, nämlich

$$R\,R^* = \frac{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} - \vartheta_I)\} + 1}{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} + \vartheta_I)\} + 1},$$

wenn $\psi = K$ mit $K = 0, 1, 2 \ldots$ ist, d. h. nach Gl. (60) falls $S^2\,\vartheta_0^2 = -\tfrac{1}{4} + (S^2/2)\,(\vartheta_I^2 + \vartheta_{II}^2) + K^2$ gilt. Ebenso ergibt sich bei gegebenem ϑ_I, ϑ_{II} und S ein und derselbe Wert

$$R\,R^* = \frac{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} - \vartheta_I)\}}{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} + \vartheta_I)\}},$$

wenn $\psi = \tfrac{1}{2}(2\,K + 1)$ mit $K = 0, 1, 2 \ldots$ ist, d. h. infolge Gl. (60), falls

$$S^2\,\vartheta_0^2 = (S^2/2)\,(\vartheta_{II}^2 + \vartheta_I^2) + K(K+1)$$

erfüllt wird. Es läßt sich zeigen, daß $\vartheta(x)$ nur dann keine Extremwerte für reelle, endliche x-Werte hat wenn

$$|\,4\,\vartheta_0^2 - 2\,(\vartheta_I^2 + \vartheta_{II}^2)\,| \leqq |\,\vartheta_I^2 - \vartheta_{II}^2\,|. \tag{61}$$

Mithin sind Extremwerte vorhanden, wenn

$$|\,4\,\vartheta_0^2 - 2\,(\vartheta_I^2 + \vartheta_{II}^2)\,| > |\,\vartheta_I^2 - \vartheta_{II}^2\,| \tag{62}$$

ist, und mit dieser Voraussetzung folgt aus Gl. (52)

$$\vartheta^2_{\max} = \vartheta_0^2 + \frac{\tfrac{1}{4}\,(\vartheta_I^2 - \vartheta_{II}^2)}{4\,\vartheta_0^2 - 2\,(\vartheta_I^2 + \vartheta_{II}^2)}. \tag{63}$$

Auf Grund von Gl. (61) kann man schließen, daß der Verlauf Gl. (52) für

$$\vartheta_0^2 = \tfrac{1}{2}(\vartheta_I^2 + \vartheta_{II}^2)$$

stets monoton ist. Nach Gl. (52) ergibt sich für diesen Verlauf

$$\vartheta^2(x) = \vartheta_I^2 + (\vartheta_{II}^2 - \vartheta_I^2)\,\frac{e^{\varkappa x}}{1 + e^{\varkappa x}},$$

und wegen Gl. (60) folgt für das Reflexionsvermögen Gl. (58)

$$RR^* = \frac{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} - \vartheta_I)\}}{\mathfrak{Sin}^2\{\pi (S/2)\,(\vartheta_{II} + \vartheta_I)\}}. \tag{64}$$

Die Definition der Schichtdicke, Gl. (57), geht über in

$$\vartheta_I^2 - \vartheta_K^2 = \frac{1}{e^n}\,(\vartheta_I^2 - \vartheta_{II}^2) \quad \text{mit } e^n \gg 1$$

und wird also in diesem Fall besonders übersichtlich.

Entsprechend der Definition von d als Schichtdicke gelangt man durch den Grenzübergang $d \to 0$ von dem hier betrachteten kontinuierlich veränderlichem ϑ^2 zur diskontinuierlichen Veränderung der Materialkonstanten. Wegen $S \to 0$ folgt in diesem Fall aus Gl. (64)

$$R\,R^* = \left(\frac{\vartheta_{II} - \vartheta_I}{\vartheta_{II} + \vartheta_I}\right)^2. \tag{65}$$

Die Voraussetzung für ungedämpfte Wellen ist nach Gl. (45) entweder $\sigma_2 \to 0$ oder $\sigma_2 \to \infty$ oder $\varrho_0 \to 0$. Da in Gl. (65) nur die asymptotischen Werte ϑ_I, ϑ_{II} eingehen, die konstante Brechungsindizes darstellen, so können die für konstante $\mathfrak{N}$ berechneten Werte, die sich für ungedämpfte Wellen im Abschnitt B. unter b), c), d) ergaben, benutzt werden. Danach ist für $\sigma \to 0:\ \vartheta^2 = \varepsilon_2 \mp \varepsilon'$,

für $\varrho_0 \to 0:\ \vartheta^2 = 1$,

für $\sigma \to \infty:\ \vartheta^2 = \dfrac{4\,\pi\,\varrho_0\,c^2}{H_0^2} + 1$.

Mit der Bedeutung von ϑ_I, ϑ_{II} im Fall $\sigma \to 0$ ergibt sich also aus Gl. (65) die FRESNELsche Formel für senkrechten Einfall elektromagnetischer Wellen.

Im Fall $\sigma \to \infty$ und mit der Voraussetzung, daß man zur Phasengeschwindigkeit ALFVÉNscher Wellen übergeht, d. h. daß $4\,\pi\,\varrho_0\,c^2/H_0^2 \gg 1$ ist, wobei außerdem $H_{0I} = H_{0II}$ angenommen wird, erhält der Brechungsindex die Form

$$\vartheta = \left(\frac{4\,\pi\,\varrho_0\,c^2}{H_0^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und Gl. (65) liefert eine von FERRARO [2] für senkrechten Einfall ALFVÉNscher Wellen ermittelte Beziehung, nämlich

$$R\,R^* = \left(\frac{\sqrt{\varrho_{0II}} - \sqrt{\varrho_{0I}}}{\sqrt{\varrho_{0II}} + \sqrt{\varrho_{0I}}}\right)^2.$$

Damit ist dieser Ausdruck ohne Verwendung von Grenzbedingungen für die Feldgrößen hergeleitet. Aus der Übereinstimmung des hier erhaltenen Ergebnisses mit dem Resultat von FERRARO folgt, daß die von FERRARO angegebenen Grenzbedingungen, nämlich elektrische und magnetische Feldstärke stetig, zumindest für den senkrechten Einfall ALFVÉNscher Wellen verwendet werden dürfen.

Aus Gl. (62) läßt sich schließen, daß Gl. (52) für

$$\vartheta_{\mathrm{I}}^2 = \vartheta_{\mathrm{II}}^2 \neq \vartheta_0^2 \tag{66}$$

stets einen Extremwert hat. Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt sich aus Gl. (52)

$$\vartheta^2(x) = \vartheta_{\mathrm{I}}^2 + (\vartheta_0^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2)\,\frac{4\,e^{\varkappa x}}{(1+e^{\varkappa x})^2}$$

und aus Gl. (58) das Reflexionsvermögen

$$R\,R^* = \frac{\cos^2 \pi\,\psi}{\mathfrak{Sin}^2(\pi\,S\,\vartheta_{\mathrm{I}}) + \cos^2 \pi\,\psi}\,, \tag{67}$$

wobei

$$\psi^2 = \tfrac{1}{4} + S^2(\vartheta_0^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2) \gtreqless 0 \quad \text{ist.}$$

Die Definition der Schichtdicke, Gl. (57), erhält die Form

$$\vartheta_{\mathrm{G}}^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2 = \vartheta_{\mathrm{K}}^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2 = \frac{4(\vartheta_0^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2)}{e^n} \quad \text{mit} \quad e^n \gg 1\,.$$

Aus Gl. (63) folgt sofort, daß in diesem Fall $\vartheta^2_{\max} = \vartheta_0^2$ ist, d. h. unter Voraussetzung der Gl. (66) bleibt die Lage des Maximums stets bei $x = 0$.

Nach Gl. (67) ergibt sich das Reflexionsvermögen Null entweder, wenn

$$\omega^2 = \frac{c^2\,n^2\,K(K+1)}{d^2(\vartheta_0^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2)} \quad (K = 0, 1, 2 \ldots)$$

ist oder für $\psi^2 \approx \frac{1}{4}$, d. h.

$$d \ll \frac{n\,c}{\omega(\vartheta_0^2 - \vartheta_{\mathrm{I}}^2)^{1/2}}\,,$$

wobei für n wiederum $e^n \gg 1$ erfüllt sein muß.

D. Energiebetrachtungen

Für die Aussagen, die in diesem Abschnitt über die energetischen Verhältnisse gemacht werden sollen, genügt es, den Energiesatz für ortsunabhängige Materialkonstanten zu formulieren. Wie üblich läßt sich der Energiesatz aus den Grundgleichungen ableiten. Dazu wird Gl. (11) mit $\mathfrak{H}$ sowie Gl. (10) mit $\mathfrak{E}$ multipliziert und letzteres von ersterem abgezogen. Dies liefert unter Verwendung von Gl. (16)

$$\frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{H}\,\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{E}\,\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}[\mathfrak{E},\mathfrak{H}] + \mathfrak{j}^2(\sigma)^{-1} + \frac{\mathfrak{v}}{c}\,[\mathfrak{j},\mathfrak{H}] = 0\,, \tag{68}$$

wobei die hierin auftretenden Variablen reell einzusetzen sind. Diese Beziehung unterscheidet sich von dem bekannten Energiesatz für elektromagnetische Wellen durch das Glied $\mathfrak{v}[\mathfrak{j},\mathfrak{H}]/c$ sowie durch das Auftreten von $\mathfrak{E}(\partial\mathfrak{D}/\partial t)$, für das hier $\mathfrak{E}(\partial\mathfrak{D}/\partial t) \neq \frac{1}{2}(\partial\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}/\partial t)$ gilt, da in $\mathfrak{D}$ das $\mathfrak{v}$ als zeitlich veränderliche Größe auftritt.

Die einzelnen Summanden der Gl. (68) können folgendermaßen umgeformt werden:

Wegen Gl. (21) und $\mathfrak{H}_0' = \{H_0; 0; 0\}$ sowie mit Hilfe von Gln. (29), (33) ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{v}}{c}\,[\mathfrak{j},\mathfrak{H}] = \frac{\varrho_0}{2}\left(\frac{\partial v_y^2}{\partial t} + \frac{\partial v_z^2}{\partial t}\right). \tag{69}$$

Mit der üblichen Definition von $\mathfrak{S}$ wird wegen $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(x,t)$; $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(x,t)$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{S} = \frac{\partial S_x}{\partial x} = \frac{c}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(E_y\,h_z - E_z\,h_y)\,, \tag{70}$$

wobei hier – wie im folgenden überhaupt – von den kleinen Komponenten des äußeren Feldes h_{0y}, h_{0z} abgesehen wird, da diese Komponenten entsprechend der Bemerkung zu Gl. (21) für ortsunabhängiges H_0 ohnehin zu Null gemacht werden können.

Im Gegensatz zu den durch Gln. (69), (70) gegebenen Ausdrücken treten in den Summanden

$$\mathfrak{E}\,\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}\,,\quad \mathfrak{j}^2(\sigma)^{-1} = \frac{1}{\sigma_1}\,j_x^2 + \frac{1}{\sigma_2}\,(j_y^2 + j_z^2) \tag{71}$$

außer den y- und z-Komponenten noch die x-Komponenten von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{j}$ auf. Diese x-Komponenten wurden bereits berechnet und als die Gln. (35), (36), (37) wiedergegeben. Um eine Abschätzung durchführen zu können, stellt man vorteilhafterweise $E_\pm$, $D_\pm$ und $j_\pm$ abhängig von $[\mathfrak{v},\mathfrak{H}_0']_\pm$ dar. Dann wird wegen $|H_0| \gg |h_y|$ bzw. $|H_0| \gg |h_z|$ sicher $|E_x|\,|\partial D_x/\partial t| \ll |E_y|\,|\partial D_y/\partial t|$ erfüllt sein, wenn zudem noch gilt:

$$\begin{aligned}(4\pi)^2\,\sigma_1^2\,\sigma_2^4\,H_0^8\{(1-\varepsilon_1)^2\,\omega^2 + (4\pi\,\sigma_1)^2\}& \\ \leqq \{H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4\}\,\{H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4(\varepsilon_2 \mp \varepsilon')^2\}\,&\{\omega^2\,\varepsilon_1^2 + (4\pi\,\sigma_1)^2\}\,.\end{aligned} \tag{72}$$

Ebenso ist $\frac{1}{\sigma_1}\,|\,j_x\,|^2 \ll \frac{1}{\sigma_2}\,|\,j_y\,|^2$ erfüllt, wenn sich erreichen läßt, daß

$$H_0^4\,\sigma_1\,\sigma_2 \leqq \varrho_0^2\,c^4\{\omega^2\,\varepsilon_1^2 + (4\,\pi\,\sigma_1)^2\}\,. \tag{73}$$

Sind die durch die Gln. (72), (73) gegebenen Einschränkungen erfüllt, so können im Energiesatz die x-Komponenten vernachlässigt werden, da wegen Gl. (34) bereits $h_x = 0$ ist. Damit und infolge der Gln. (69), (70), (71) sowie unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{E}\,\mathfrak{D}}{\partial t} = 2\,\mathfrak{E}\,\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \mathfrak{E}\,\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{D}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

läßt sich Gl. (68) nunmehr schreiben

$$\frac{1}{8\,\pi}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\{H_0^2 + h_y^2 + h_z^2 + E_y\,D_y + E_z\,D_z + 4\,\pi\,\varrho_0\,(v_y^2 + v_z^2)\}$$
$$+\,\frac{1}{8\,\pi}\left\{E_y\,\frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z\,\frac{\partial D_z}{\partial t} - D_y\,\frac{\partial E_y}{\partial t} - D_z\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\right\} + \frac{1}{\sigma_2}\,\{j_y^2 + j_z^2\} + \frac{c}{4\,\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\{E_y\,h_z - E_z\,h_y\} = 0\,. \tag{74}$$

Die hier betrachteten zirkular polarisierten Wellen ermöglichen die Ausnutzung der Beziehung $E_z = i\,E_y$ bzw. $E_z = -\,i\,E_y$. Aus den Gln. (48) bis (51) folgt dann auch $h_z = i\,h_y$; $v_z = i\,v_y$; $D_z = i\,D_y$; $j_z = i\,j_y$ bzw. $h_z = -\,i\,h_y$; $v_z = -\,i\,v_y$; $D_z = -\,i\,D_y$; $j_z = -\,i\,j_y$, und es ergibt sich

$$E_y\,\frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z\,\frac{\partial D_z}{\partial t} = -\,\frac{\omega^2\,\varrho_0\,c^2\,H_0^2\,\sigma_2\,(\varepsilon_2 \mp \varepsilon' - 1)}{H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4}\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\,, \tag{75}$$

$$j_y^2 + j_z^2 = \frac{\omega^2\,\varrho_0^2\,\sigma_2^2\,c^4}{H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4}\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\,,\quad h_y^2 + h_z^2 = (\varphi^2 + \vartheta^2)\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\,, \tag{76), (77}$$

$$v_y^2 + v_z^2 = \frac{H_0^2\,\sigma_2^2\,c^2}{H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4}\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\,,\quad E_y\,h_z - E_z\,h_y = \vartheta\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\,, \tag{78), (79}$$

$$E_y\,D_y + E_z\,D_z = \frac{H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4\,(\varepsilon_2 \mp \varepsilon')}{H_0^4\,\sigma_2^2 + \omega^2\,\varrho_0^2\,c^4}\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\,, \tag{80}$$

wobei Gl. (47) ausgenutzt wurde. Infolge Gl. (44) wird mit Gln. (75) bis (80) aus Gl. (74)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\omega}{4\,\pi}\,\frac{b}{g}\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x} + \operatorname{div}\mathfrak{S} = 0\,, \tag{81}$$

wobei $\qquad W = W_{\mathrm{m}} + W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{K}}\,,$

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{8\,\pi}\,(H_0\,B_0 + h_y^2 + h_z^2) = \frac{1}{8\,\pi}\,\{H_0^2 + (\vartheta^2 + \varphi^2)\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\}\,,$$

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{8\,\pi}\,(E_y\,D_y + E_z\,D_z)\,;\qquad W_{\mathrm{K}} = (v_y^2 + v_z^2)\,,\qquad W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{K}} = \frac{1}{8\,\pi}\,\frac{a}{g}\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}\,,$$

$$S_x = \frac{c}{4\,\pi}\,\vartheta\,E_0^2\,e^{-2(\omega\,\varphi/c)\,x}$$

mit $(a - i\,b)/g = (\vartheta - i\,\varphi)^2$ und a, b, g durch Gl. (44) gegeben ist.

Bekanntlich ist die in einem Körper durch das elektromagnetische Feld erzeugte Wärmemenge Q in invarianter Form für $\beta^2 \ll 1$ durch den Ausdruck $Q = -\,f_i\,U_i$ gegeben, wobei f_i die Komponenten der Viererkraftdichte, U_i die Komponenten der Vierergeschwindigkeit darstellt. Verwendet man zur Berechnung der f_i den Energie-Impuls-Tensor von MINKOWSKI, so ergibt sich für Q nur dann der übliche Ausdruck der JOULEschen Wärme $(\mathfrak{j}_{\mathrm{L}}\,\mathfrak{E}^*)$, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ konstant ist. Für $\mathfrak{v}$ variabel und $|\,f_x\,U_x\,| \ll |\,f_y\,U_y\,|$ wird für zirkular polarisierte Wellen

$$Q = \frac{1}{8\,\pi}\left\{E_y\,\frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z\,\frac{\partial D_z}{\partial t} - D_y\,\frac{\partial E_y}{\partial t} - D_z\,\frac{\partial E_y}{\partial t}\right\} + \frac{1}{\sigma_2}\,\{j_y^2 + j_z^2\}\,,$$

also wegen Gln. (75), (76)

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} \frac{b}{g} E_0^2 e^{-2(\omega \varphi/c)x}.$$

Nach Gl. (44) kann b/g negativ werden, und zwar, wenn $(\varepsilon_2 \mp \varepsilon' - 1) > \frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2}$ ist. Da dann auch $Q<0$ wird, so ergäbe sich in diesem Fall aus dem Energiesatz Gl. (81) ein Widerspruch zum 2. Hauptsatz. Deshalb ist zu vermuten, daß stets $(\varepsilon_2 \mp \varepsilon' - 1) \leqq \frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2}$ gilt, was mit Hilfe einer Dispersionstheorie zu beweisen wäre, die für in einem Magnetfeld befindliche Medien gültig ist und auch die Dämpfung berücksichtigt.

Wie bereits im Abschnitt B unter e) erwähnt, ergeben sich aus der Schwingungsgleichung (43) immer dann *ungedämpfte* Wellen, wenn der imaginäre Anteil des Koeffizienten verschwindet, d. h. für $b/g=0$. In diesem Fall liefert Gl. (81) den Energiesatz für ungedämpfte Wellen

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0, \tag{82}$$

wobei

$$W = W_m + W_e + W_K,$$

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\{H_0^2 + \vartheta^2 E_0^2\}; \quad W_e + W_K = \frac{1}{8\pi}\vartheta^2 E_0^2,$$

$$S_x = \frac{c}{4\pi}\vartheta E_0^2. \tag{83}$$

Für die ebenfalls im Abschnitt B unter e) genannten 3 Fälle ungedämpfter Wellen liefern die Bedingungen Gln. (72), (73) folgende Aussagen:

Für $\sigma \to 0$, d. h. $\sigma_1 \to 0$; $\sigma_2 \to 0$

aus Gl. (72) $0 \leqq \{\omega^4 c^4 \varrho_0^2 \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 \mp \varepsilon')\}^2$,

aus Gl. (73) $0 \leqq \{\omega \varrho_0 c^2 \varepsilon_1\}^2$,

so daß in diesem Fall (rein elektromagnetische Wellen) keine Einschränkungen gegeben sind.

Für $\sigma \to \infty$, d. h. $\sigma_1 \to \infty$; $\sigma_2 \to \infty$, ist Gl. (72) identisch erfüllt und Gl. (73) ergibt

$$\frac{4\pi\varrho_0 c^2}{H_0^2} \underset{(=)}{>} 1,$$

was gerade die am Abschnitt B unter c) erwähnte Bedingung für die Existenz Alfvénscher Wellen darstellt. Für diese Wellen liefern also Gln. (72), (73) ebenfalls keine Einschränkung.

Für $\varrho_0 \to 0$ liefert Gl. (73) $H_0^4 \sigma_1 \sigma_2 \leqq 0$, woraus für $H_0 \neq 0$ notwendig $\sigma_{1,2}=0$ folgt und damit liefert Gl. (72) in diesem Fall $0 \leqq \omega^2 \varepsilon_1^2$. Da im Vakuum ohnehin die Leitfähigkeit Null sein muß, so ergeben Gln. (72), (73) auch hier keine Einschränkung.

Bekanntlich läßt sich stets dann, wenn der Energiesatz die Form der Gl. (82) annimmt, zeigen, daß der gesamte Energiestrom tatsächlich durch den Strömungsvektor $\mathfrak{S}$ dargestellt wird.

Durch das Auftreten eines äußeren statischen Magnetfeldes $\mathfrak{H}_0$ enthält die Gesamtenergie einen Energieanteil, der unabhängig von der Wellenenergie W^w ist. Deshalb gilt für die Energiedichte der Welle $W^w = W - W_m^{st}$, wobei $W_m^{st} = (1/8\pi) H_0 B_0$ ist. Das Auftreten eines statischen Feldes macht sich außerdem auch im Strömungsvektor $\mathfrak{S}$ bemerkbar. Der durch das äußere Feld $\mathfrak{H}_0$ bedingte Anteil von $\mathfrak{S}$ läßt sich aber bekanntlich durch Bildung des zeitlichen Mittelwertes $\overline{\mathfrak{S}}$ ausschalten, so daß $\overline{\mathfrak{S}}$ den gesamten, die Wellenenergie W^w transportierenden Energiestrom darstellt. Da nun ferner in S_y und S_z wegen Gl. (21) sowie Gln. (16), (73) nur $H_0 E_z$ bzw. $H_0 E_y$ auftritt, so ist schließlich

$$|\overline{\mathfrak{S}}| = S_x = \frac{c}{4\pi}\vartheta E_0^2.$$

Mit der Bedeutung von $\overline{\mathfrak{S}}$ als gesamter Energiestrom muß für ungedämpfte Wellen

$$|\overline{\mathfrak{S}}|_e = |\overline{\mathfrak{S}}|_r + |\overline{\mathfrak{S}}|_d \tag{84}$$

gelten, wobei mit e die einfallende, mit d die durchgehende und mit r die reflektierte Welle bezeichnet wird. Wegen der Gleichheit des Brechungsindex für die einfallende und reflektierte Welle $\vartheta_e = \vartheta_r$, wobei nun $\vartheta_e = \vartheta_r = \vartheta_I$ und $\vartheta_d = \vartheta_{II}$ gesetzt wird, folgt dann aus Gl. (83) mit der Bezeichnung

$$\frac{E_{0r}^2}{E_{0e}^2} = R R^* \quad \text{und} \quad \frac{E_{0d}^2}{E_{0e}^2} = D D^*$$

schließlich

$$R R^* + \frac{\vartheta_{II}}{\vartheta_I} D D^* = 1. \tag{85}$$

Die Ausdrücke für RR^* und DD^* aus dem Epsteinschen Verfahren [Gln. (58), (59)] erfüllen Gl. (85) identisch. Damit ist gezeigt, daß auch für ortsabhängige Materialkonstanten, deren Abhängigkeit allerdings in der durch das Epsteinsche Verfahren bedingten Form Gl. (52) vorliegen muß, die Energiebilanz Gl. (84) gültig ist. Das bedeutet zugleich, daß auf die x-Komponenten, die durch die Schwingungsgleichung (43) nicht erfaßt werden, im Rahmen der hier betrachteten Näherung keine Energie übertragen wird. Deshalb kann die x-Komponente der Gl. (33), wie bereits im Anschluß an Gl. (37) bemerkt wurde, im Fall, daß die Abhängigkeit der Materialkonstanten der Gl. (52) genügt, zumindest für ungedämpfte Wellen undiskutiert bleiben. Damit ist die Abtrennung und alleinige Behandlung der y- und z-Komponenten der Variablen unter den genannten Voraussetzungen auch energetisch gerechtfertigt.

Für die 3 Möglichkeiten ungedämpfter Wellen sind die in Gl. (85) auftretenden Brechungsindizes aus dem Abschnitt B unter b), c), d) zu entnehmen. Danach gilt

$$\sigma_2 \to 0\,, \qquad \vartheta^2_{\mathrm{I,II}} = (\varepsilon_2 \mp \varepsilon')_{\mathrm{I,II}}\,,$$

$$\sigma_2 \to \infty\,, \qquad \vartheta^2_{\mathrm{I,II}} = \left(\frac{4\,\pi\,\varrho_0\,c^2}{H_0{}^2} + 1\right)_{\mathrm{I,II}}$$

$$\varrho_0 \to 0\,, \qquad \vartheta^2_{\mathrm{I,II}} = 1\,.$$

Herrn Prof. Dr. G. Hettner bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für ihre ständige Förderung durch zahlreiche Diskussionen zu großem Dank verpflichtet. Herrn Doz. Dr. A. Haug danke ich für Diskussionsbemerkungen und Ratschläge. Besonders dankbar bin ich Herrn Dr. E. Fick und Herrn Dr. F. Engelmann für zahlreiche Gespräche, in denen ich viele wertvolle Hinweise erhielt.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Gewährung eines Forschungsstipendiums zur Durchführung dieser Arbeit.

Über das innere Feld beim Kerr-Effekt von Dipolflüssigkeiten*

Von Albrecht Steppuhn

Aus dem I. Physikalischen Institut der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

(Z. Naturforschg. **11 a**, 912—919 [1956]; eingegangen am 12. September 1956)

Auf der Grundlage einer Arbeit von Klages zur Theorie des Kerr-Effektes für unpolare Flüssigkeiten, in der das Molekül als Ellipsoid angenähert wird und als zusätzlicher Parameter die DK der Molekülmaterie erscheint, wird eine Beziehung für die Kerr-Konstante polarer Moleküle in der flüssigen Phase abgeleitet. Bei Anwendung dieser Rechnung auf Lösungen zeigt sich dann, daß die molaren Kerr-Konstanten der untersuchten Dipolmoleküle: Methyläthylketon, Methylisobutylketon, n-Dodecylchlorid und Di-n-butyläther in den Lösungsmitteln Hexan und Cyclohexan über den ganzen Konzentrationsbereich unabhängig von der Konzentration werden. Die bisher in diesen Lösungsmitteln gefundene und teilweise als besondere Flüssigkeitsstruktur gedeutete Abhängigkeit dürfte daher im wesentlichen auf dem nicht richtigen Ansatz für das innere Feld beruhen. Dagegen ist in Benzollösung besonders bei den beiden Ketonen eine merkliche Abhängigkeit ihrer molaren Kerr-Konstante von der Konzentration festzustellen.

Vergleicht man die bisher bekannten molaren Kerr-Konstanten MK der reinen Flüssigkeiten mit denen ihrer Gasphase, so findet man die MK der Flüssigkeit stets wesentlich kleiner als die des Gases. Nachdem dieses früher auf eine besondere Flüssigkeitsstruktur zurückgeführt wurde[1], ist in letzter Zeit[2] bei dieser Auswertung ein nicht richtiger Ansatz im inneren Feld vermutet worden. Für die potentielle Energie eines Moleküls und damit für seine mittlere Orientierung zur Feldrichtung ist nämlich die sogenannte innere Feldstärke F beim Kerr-Effekt maßgebend, die am Molekül selbst herrscht. Sie unterscheidet sich wegen der elektrischen Wechselwirkung der Moleküle untereinander von der außen an die Platten des Kondensators angelegten Feldstärke E_0, die in Zukunft als äußere Feldstärke bezeichnet wird. Nur wenn man die Größe des inneren Feldes kennt, kann man aus der gemessenen Kerr-Konstanten mit Hilfe eines Feldfaktors X die molare Kerr-Konstante berechnen. Ist z. B. dieser Feldfaktor für den Anisotropie- und den Dipolanteil der Kerr-Konstanten K gleich groß, so wird die molare Kerr-Konstante $\mathrm{MK} = K\,M/X\,\varrho$, wenn M das Molekulargewicht und ϱ die Dichte der betrachteten Substanz ist.

Überträgt man nun das von Onsager[3] berechnete innere Feld auf den Kerr-Effekt[4], so erhält man wenigstens größenordnungsmäßige Übereinstim-

* D 77, Mainz 1956.

[1] u. a. H. A. Stuart, Naturwiss. **31**, 123 [1943].

[2] G. Klages, Z. Naturforschg. **9 a**, 602 [1954].

[3] L. Onsager, J. Amer. Chem. Soc. **58**, 1486 [1936].

[4] G. Klages, Z. Naturforschg. **7 a**, 669 [1952].